補足資料：確率測度の一意性と構成

- Dynkin の π-λ 定理：ある集合族上で同じ確率を与える2つの確率測度は、その集合族で生成される σ-加法族上でも一致する。
  応用例：同じ分布関数を持つ測度は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上で一意
  → 一意性
- Hopf の拡張定理：ある有限加法族上の確率測度はその有限加法族を含む最小の σ-加法族上の確率測度に拡張される。
  → 存在性
  （もっとも、その拡張が一意であることも含めて Hopf の拡張定理と通常は言う。）
  ↳ 演習問題も参照

- Dynkin の π-λ 定理

目標：分布関数 F が与えられれば、対応する確率測度 P が一意に定まることを言いたい。つまり、2つの確率測度 P_1, P_2 が
$$P_1((-\infty, a]) = P_2((-\infty, a]) = F(a) \text{ をみたすなら、}$$
$$P_1(A) = P_2(A) \quad (\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ となること}$$
を示したい。（ただし、そのような測度が存在することは仮定）
↳ Hopf の拡張定理

Def

- π-システム：集合族 $\mathcal{P}$ が π-システム $\Leftrightarrow$ $A, B \in \mathcal{P}$ なら $A \cap B \in \mathcal{P}$
  （有限回の共通部分を取る操作について閉じている）
- λ-システム（Dynkin族）：集合族 $\mathcal{L}$ が λ-システム $\Leftrightarrow$

$B \setminus A := B \cap A^c$

$$\begin{cases} (1) & \Omega \in \mathcal{L} \\ (2) & A, B \in \mathcal{L},\ A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L} \\ (3) & A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \in \mathcal{L} \\ & \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \end{cases}$$

//

※ σ-加法族は π-システムでも λ-システムでもある。

$\sigma(\mathcal{P})$：$\mathcal{P}$を含む最小のσ-加法族
$\mathcal{L}(\mathcal{P})$：$\mathcal{P}$を含む最小のλ-システム

Thm（Dynkinの定理）

(1) $\mathcal{P}$はπ-システムで、$\mathcal{L}$は$\mathcal{P}$を含むλ-システム（$\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$）であるとする。
すると、$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ である。

(2) π-システム$\mathcal{P}$に対し、
$$\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\mathcal{P})$$
が成り立つ。 //

証明は後で与えるが、(1) ⇒(2) はすぐにわかる。なぜなら、(1)より
$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ は示されており、かつ任意のσ-加法族はλ-システムでもあるので、$\sigma(\mathcal{P})$は$\mathcal{P}$を含むλ-システムでもある。つまり$\sigma(\mathcal{P}) \supset \mathcal{L}(\mathcal{P})$が成り立つ。
よって $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\mathcal{P})$ である。

Dynkinの定理より次の命題が示せる。（証明は次のページ）

Cor 1

$(\Omega, \mathcal{F})$上の確率測度 P_1, P_2 が、あるπ-システム $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ において、
$$\forall A \in \mathcal{P} \text{ で } P_1(A) = P_2(A)$$
をみたすなら、
$$\forall B \in \sigma(\mathcal{P}) \text{ で } P_1(B) = P_2(B)$$
が成り立つ。 //

さらに、この系として、分布関数が共通な2つの確率測度が$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$上で一致することが示せる。

Cor 2

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$上の確率測度 P_1, P_2 が
$P_1((-\infty, a]) = P_2((-\infty, a]) = F(a)$ $(\forall a \in \mathbb{R})$ をみたすなら、
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$上で $P_1 = P_2$ である。 //

（Cor 2の証明）

$\mathcal{P} = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ はπ-システムである。仮定より、$\forall A \in \mathcal{P}$ で $P_1(A) = P_2(A)$ である。よって Cor 1 より $P_1(B) = P_2(B)$ $(\forall B \in \sigma(\mathcal{P}))$ でもある。ここで、$\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることに注意すると、これは$\mathcal{B}(\mathbb{R})$上で $P_1 \equiv P_2$ であることに他ならない。 //

(Cor 1 の証明)

まず、$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{F} \mid P_1(A) = P_2(A)\}$ とすると、$\mathcal{L}$ は λ-システムになっていることを示す。

(1) $P_1(\Omega) = 1$, $P_2(\Omega) = 1$ より、$\Omega \in \mathcal{L}$.

(2) $A, B \in \mathcal{L}$, $A \subset B$ とすると、$P_1(A) = P_2(A)$ かつ $P_1(B) = P_2(B)$ である。

確率測度の性質(加法性)より、

$$P_1(B \setminus A) = P_1(B) - P_1(A) = P_2(B) - P_2(A) = P_2(B \setminus A).$$

よって、$B \setminus A \in \mathcal{L}$ を得る。

(3) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \in \mathcal{L}$ とする。確率の連続性より

$$P_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P_1(A_n) = \lim_{n\to\infty} P_2(A_n) = P_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

なので、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ である。

以上より、$\mathcal{L}$ は λ-システムであることが分かった。

仮定より $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ なので、Dynkin の定理から、$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ である。

$\mathcal{L}$ 上で P_1 と P_2 は一致するので、$\sigma(\mathcal{P})$ 上でも両者は一致する。 //

これから、Dynkin の定理を示すが、その前に次のことを注意しておく。

Lem

$\mathcal{L}$ が λ-システム $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} (1)' & \Omega \in \mathcal{L} \\ (2)' & A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L} \\ (3)' & A_n \cap A_m = \phi \ (\forall n \neq m),\ A_n \in \mathcal{L} \text{ なら、} \\ & \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \text{ である。} \end{cases}$$

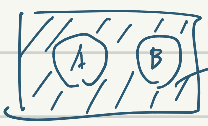
//

(証明) ($\Rightarrow$ のみ示す)

(1)' は定義から自明。(2)' も $\Omega \in \mathcal{L}$ なので $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}$、つまり $A^c \in \mathcal{L}$ が従う。

(3)' を示す。そのため、まずは $A, B \in \mathcal{L}$, $A \cap B = \phi$ に対し、$A \cup B \in \mathcal{L}$ であることを示す。(2) より $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}$ である。また $B \subset \Omega \setminus A$ なので、$(\Omega \setminus A) \setminus B \in \mathcal{L}$ でもある。ここで $(\Omega \setminus A) \setminus B = A^c \cap B^c$ なので、$A^c \cap B^c \in \mathcal{L}$.

(2)' より、$A^c \cap B^c \in \mathcal{L}$ なら $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B \in \mathcal{L}$ である。



$A^c \cap B^c$

あとは、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}_{\in \mathcal{L} \text{ を今示した}} \in \mathcal{L}$ より従う。

$(A_n \cap A_m = \phi)$

(3) より ∵ $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ は単調増大

(Dynkinの定理の証明)

証明の方針: $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ が π-システムであることを示す. 実は λ-システムが π-システムであるなら, それは σ-加法族であることが示せる. つまり, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ が成り立つ.

Lem

ある集合族 $\mathcal{B}$ が, π-システムでも λ-システムでもあるとき, $\mathcal{B}$ は σ-加法族である.

(証明)

(1) $\Omega \in \mathcal{B}$ は λ-システムの定義から明らか.

(2) $A \in \mathcal{B}$ なら $A^c \in \mathcal{B}$ であることも性質(2)'より従う.

(3) まず有限和について閉じていることを示す.

$A, B \in \mathcal{L}$ とする. AとBは互いに疎であるとは限らないので (3)' を使えない. しかし, $\mathcal{B}$ はπ-システムなので, $A \cap B \in \mathcal{B}$ である. よって, λ-システムの性質より $A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{B}$, $B \setminus (A \cap B) \in \mathcal{B}$ でもある. また, (1), (2)より $\phi = (\Omega)^c \in \mathcal{B}$ であるので, λ-システムの性質(3)'より,

$$A \cup B = \underbrace{\underset{\in \mathcal{B}}{(A \setminus (A \cap B))} \cup \underset{\in \mathcal{B}}{(B \setminus (A \cap B))} \cup \underset{\in \mathcal{B}}{(A \cap B)} \cup \underset{\in \mathcal{B}}{\phi} \cup \underset{\in \mathcal{B}}{\phi} \cdots}_{\text{互いに排反}}$$

$$\in \mathcal{B}$$

である. このことから $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ なら, ($A_n \cap A_m = \phi$ $(n \neq m)$ とは限らない)

$\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{B}$ である. よって,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n \right)}_{A'_m \text{とおく}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{L}\text{に含まれる}}}{A'_m} \in \mathcal{B}.$$

なお, 最後の $\bigcup_{m=1}^{\infty} A'_m \in \mathcal{B}$ は $A'_1 \subset A'_2 \subset \cdots \in \mathcal{B}$ に性質(3)を適用した.

以上より, $\mathcal{B}$ は σ-加法族である. //

これより、$\mathcal{L}(\mathcal{P})$ が π-システムになることを示す。 前の Lem より $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ が σ-加法族になるから

これが示せれば、$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \supset \sigma(\mathcal{P})$ であり、かつ、$\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ の定義より、
$\mathcal{L} \supset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ である。よって、$\mathcal{L} \supset \sigma(\mathcal{P})$ が従う。

$\mathcal{L}(\mathcal{P})$ が π-システムであることの証明:

$\mathcal{G}_A := \{ B \in \sigma(\mathcal{P}) \mid A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}) \}$ とする。

(i) $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ なら $\mathcal{G}_A$ は λ-システムである。

なぜなら、

(1)' $\Omega \in \mathcal{G}_A$ $\quad (\because \Omega \cap A = A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}))$ Aの仮定

(2)' $B \in \mathcal{G}_A$ なら、$A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ であり、$A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ であることとあわせて、$A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ でもある。
つまり、$B^c \in \mathcal{G}_A$ である。

(3)' $B_n \in \mathcal{G}_A$ が互いに排反であるとする。$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_A$ を示したい。
$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$ であるが、$B_n \in \mathcal{G}_A$ より、$A \cap B_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ である。しかも、$(A \cap B_n)_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反であるので、
$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$、つまり、$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_A$ である。

よって $\mathcal{G}_A$ は λ-システムである。

(ii) $A \in \mathcal{P}$ なら $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}_A$ である。

なぜなら、まず $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ でもあることから (i) より $\mathcal{G}_A$ は λ-システムであることに注意する。今、$\mathcal{P}$ は π-システムなので $^\forall B \in \mathcal{P}$ は $B \cap A \in \mathcal{P}$ である。つまり、$^\forall B \in \mathcal{P}$ は $B \in \mathcal{G}_A$ である ($\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$)。よって $\mathcal{G}_A$ は $\mathcal{P}$ を含む λ-システムなので、$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}_A$ である。

このことから、$A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ に対し、$A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ である。
あとは A を $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ まで広げたい。

(iii) $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ なら、$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}_A$ である。

なぜなら、(ii) より、$^\forall B \in \mathcal{P}$ に対し、$A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ であることは示されているので、$\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$ である。また (i) より $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ なら $\mathcal{G}_A$ は λ-システムなので、$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}_A$ でもある。よって、$A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ なら、$^\forall B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ で $A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ をみたす。
つまり、$\mathcal{L}(\mathcal{P})$ は π-システムである。 //

・Hopfの拡張定理.

こちらは長くなるので証明はしない.
ステートメントだけ述べる.

Def (有限加法族)

$\mathcal{A}$ が有限加法族 $\iff$
$$\begin{cases} (1)\ \phi, \Omega \in \mathcal{A} \\ (2)\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \\ (3)\ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{m=1}^{n} A_m \in \mathcal{A} \end{cases}$$
↑有限和まで.

Def (集合半代数) (半環は $\Omega \in S$ を要請しない)

S が集合半代数 $\iff$
(1) $\phi, \Omega \in S$
(2) S は π-システム $(A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S)$
(3) $A \in S$ なら, A^c は有限個の互いに排反な集合 $B_1, \dots, B_n \in S$ に分割される:
$$A^c = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad (B_i \in S,\ B_i \cap B_j = \phi\ (i \neq j))$$

例 $\Omega = \mathbb{R}$.
$S = \{(a, b] \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ は集合半代数.

Lem.
集合半代数 S を含む最小の有限加法族は. S の互いに排反な元達の有限和の族として表せる.
$$\mathcal{A}(S) = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \,\middle|\, I: \text{有限}, B_i \in S,\ B_i \cap B_j = \phi\ (i \neq j,\ i, j \in I) \right\}$$
↑ S を含む最小の有限加法族

Thm.

$\mathcal{S}$: Ω 上の集合半代数

$P : \mathcal{S} \to [0,1]$: $\mathcal{S}$ 上の σ-加法的集合関数で以下をみたす:

$$\left[\begin{array}{l} P(\Omega)=1,\ A_n \in \mathcal{S} \text{ が } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S} \text{ かつ互いに排反なら} \\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array}\right]$$

すると. P の $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ への拡張 P' が一意に存在し.

$$P'\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

($A_i \in \mathcal{S}$, I:有限, $(A_i)_{i \in I}$ は互いに排反)

で与えられる. P' は $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ 上の σ-加法的な確率測度になっている. //

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$ ($\forall A \in \mathcal{A}$), $P(\Omega)=1$
(2) $P(A) = 1 - P(A^c)$, (3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ (互いに排反) が $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ なら $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Thm (Hopfの拡張定理)

有限加法族 $\mathcal{A}$ 上の σ-加法的確率測度に対し.
$\sigma(\mathcal{A})$ への拡張が一意に存在する. //

この一意性にDynkinの定理を使う.

(構成法は次のページ)

上の2つのThmを合わせると. 次の定理を得る.

Thm

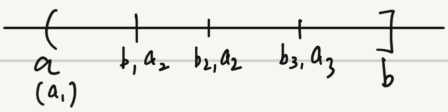
集合半代数 $\mathcal{S}$ 上の σ-加法的な集合関数 $P : \mathcal{S} \to [0,1]$ で $P(\Omega)=1$ をみたすものは. $\sigma(\mathcal{S})$ 上に一意に拡張できる. //

より正確には. この段階ではJordan測度

例えば $(0,1]$ 区間上のルベーグ測度は $\mathcal{S} = \{(a,b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ 上で σ-加法的になることが示せる. つまり. $\mu((a,b]) = b-a$ とおくと.

$(a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$ (互いにdisjoint) に対し.

$$\mu((a,b]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i])$$



つまり. $b-a = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$

が示せる. これより. $((0,1], \mathcal{B}((0,1]))$ 上の確率測度 μ' で

$\mu'((0,1])=1$, $\mu'((a,b]) = \mu((a,b]) = b-a$

であるものが唯一存在することが従う. ($\because \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}((0,1])$)

$\sigma(\mathcal{A})$上の確率測度の構成方法　（概要）

任意の部分集合 $A \subset \Omega$ に対し、Pより定まる外測度 P^* を以下のように定める：

$$P^*(A) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \,\middle|\, B_i \in \mathcal{S},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\}.$$

可算無限個

（これを、有限和にした場合、つまり $P^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{m} P(B_i) \,\middle|\, B_i \in \mathcal{S},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i,\ m \geq 1 \right\}$ とすると、望ましい拡張が得られない。
例えば、$\Omega = [0,1]$, P: $[0,1]$上の一様分布, $\mathcal{S}$: 半開区間全体、とすると、有理数全体 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ に対し $P^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$ となってしまう。しかも $P^*(\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) = 1$ でもあり、$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ を"測れてない"。この場合、$P^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$ となって欲しい。
⟶ 可算無限和まで考えることで、これは0になる）

ここで、

$$\mathcal{D} := \{ D \subset \Omega \mid P^*(D) + P^*(D^c) = 1 \}$$

とする。（内測度と外測度が一致する集合）
すると、次が成り立つ。

Lem

1. $\mathcal{D}$ は σ-加法族
2. P^* の $\mathcal{D}$ への制限は $(\Omega, \mathcal{D})$ 上の確率測度になっている。 //

Proof

証明の前に P^* が連続性をみたすことを認める：

$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset \Omega$ に対し、$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ としたとき、

$$\lim P^*(A_n) = P^*(A)$$

である。

1. $P^*(\Omega)=1$, $P^*(\phi)=0$ はすぐに確認できる.

よって $P^*(\Omega)+P^*(\phi)=1$ であり

$\Omega, \phi \in \mathcal{D}$

である.

2. $D \in \mathcal{D}$ なら定義より

$$P^*(D)+P^*(D^c)=1$$

なので, $P^*(D^c)+P^*((D^c)^c)=1$ でもある.

よって. $D^c \in \mathcal{D}$ でもある.

3. まず $\mathcal{D}$ が有限可法的で. P^* も $\mathcal{D}$ 上で有限可法的であることを示す.

まず, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ なら.

$$P^*(D_1 \cup D_2) + P^*(D_1 \cap D_2) \leq P^*(D_1) + P^*(D_2) \quad \text{—(1)}$$
$$P^*((D_1 \cup D_2)^c) + P^*((D_1 \cap D_2)^c) \leq P^*(D_1^c) + P^*(D_2^c) \quad \text{—(2)}$$

が成り立つ

(これは非自明だが. 成り立つと認める)

これらを辺々足すと,

$$\begin{aligned}
&P^*(D_1 \cup D_2) + P^*(D_1 \cap D_2) + P^*((D_1 \cup D_2)^c) + P^*((D_1 \cap D_2)^c) \\
&\leq P^*(D_1) + P^*(D_2) + P^*(D_1^c) + P^*(D_2^c) \\
&= 1 + 1 = 2 \quad (\because D_1, D_2 \in \mathcal{D})
\end{aligned}$$

一方. $P^*(A)+P^*(A^c) \geqq 1$ は常に成り立つので.

左辺 $\geqq 2$ は常に成り立つ よって. 特に.

$$P^*(D_1 \cup D_2) + P^*((D_1 \cup D_2)^c) = 1$$
$$P^*(D_1 \cap D_2) + P^*((D_1 \cap D_2)^c) = 1$$

である. これらより.

$$D_1 \cup D_2, \ D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$$

である. また. (1), (2) が等号で成り立つことも上の議論より明らかなので. $D_1 \cap D_2 = \phi$ なる $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ に対し.

$$P^*(D_1 \cup D_2) = P^*(D_1) + P^*(D_2)$$

を得る.

つまり、$\mathcal{D}$は有限加法的であり、P^*も$\mathcal{D}$上で有限加法性をみたす。

あとは、$\mathcal{D}$が"単調族"であることを示せば、$\mathcal{D}$はσ-加法族であることが示される(単調族定理:単調族かつ有限加法的$\Rightarrow$ σ-加法族)

ここで、単調族とは、

(a) $A_i \in \mathcal{D}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ のとき、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

(b) $A_i \in \mathcal{D}$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ のとき $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

をみたす集合族である。

今$\mathcal{D}$は有限加法族なので(a)が満たされれば(b)も成り立つ。

よって(a)を示せば良い。

つまり、$D_n \in \mathcal{D}$で$D_n \nearrow D$のとき($D_1 \subset D_2 \subset \cdots$かつ$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$のとき$D_n \nearrow D$と書く)

$D \in \mathcal{D}$を示す。

まず、証明の冒頭で述べたP^*の単調性より

$$\lim_{n\to\infty} P^*(D_n) = P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = P^*(D)$$

である。

一方、

$$P^*(D^c) = P^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^c\right) \leq P^*(D_m^c) \quad (\forall m)$$

であり、

$$1 \leq P^*(D) + P^*(D^c)$$

なので、

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} P^*(D_n) + P^*(D_m^c)$$

である。mについても極限を取れば

$$\begin{aligned} 1 &\leq P^*(D) + P^*(D^c) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} P^*(D_n) + \lim_{m\to\infty} P^*(D_m^c) = \lim_{n\to\infty}\left(P^*(D_n) + P^*(D_n^c)\right) \\ &= 1 \quad (\because D_n \in \mathcal{D}, \forall n) \end{aligned}$$

を得る。このことから$P^*(D) + P^*(D^c) = 1$なので、$D \in \mathcal{D}$である。

よって、$\mathcal{D}$は単調族であり、単調族定理よりσ-加法族。

あとはP^*のσ-加法性を示せば良い。

$D_n \in \mathcal{D}$ $(n = 1, 2, \cdots)$を、互いに排反な集合列とする。

↓次ページ

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right) \qquad (\because P^*の単調性より)$$

さらに、P^*は有限加法的であることはすでに示しているので

$$P^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P^*(D_k)$$

である。よって、

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P^*(D_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P^*(D_k)$$

である。 //

P^*の構成法より、

(1) $\mathcal{S} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{D}$

(2) $P^*(A) = P(A) \quad (\forall A \in \mathcal{S})$

であることは確認できる。

$\mathcal{D}$はσ-加法族なので、$\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}$でもある。

P^*は$\mathcal{D}$上で確率測度なので、それを$\sigma(\mathcal{S})$に制限した$P^*|_{\sigma(\mathcal{S})}$も$\sigma(\mathcal{S})$上の確率測度になる。

さらに、π-λ定理より、そのような拡張は一意に定まるので、

$(\Omega, \sigma(\mathcal{S}), P^*|_{\sigma(\mathcal{S})})$ は Pの$\sigma(\mathcal{S})$への一意的な拡張をあたえる。